Productos Notables y Factorización

Eje temático: Álgebra y Funciones

DEMRE

- Establecimiento de estrategias para **transformar expresiones algebraicas no fraccionarias en otras equivalentes**, mediante el uso de **productos notables y factorizaciones**.
- Establecimiento de estrategias para **simplificar, sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas** simples, con binomios tanto en el numerador como en el denominador y determinación de aquellos valores que indefinen una expresión algebraica fraccionaria.
- Interpretar la **operatoria con expresiones algebraicas fraccionarias** como una generalización de la **operatoria con fracciones numéricas**, establecer estrategias para operar con este tipo de expresiones y comprender que estas operaciones tienen sentido solo en aquellos casos en que estas están definidas.

1. Productos Notables

Se le llama **Productos Notables** a ciertos productos que cumplen **reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección**, es decir, sin verificar la multiplicación.

Pueden ser útiles para cálculos mentales y **ahorrar tiempo** multiplicando.

1.1. Cuadrado de Binomio

Recordamos que un binomio es una expresión algebraica que consta de dos monomios sumados, el cual se puede expresar de manera general como

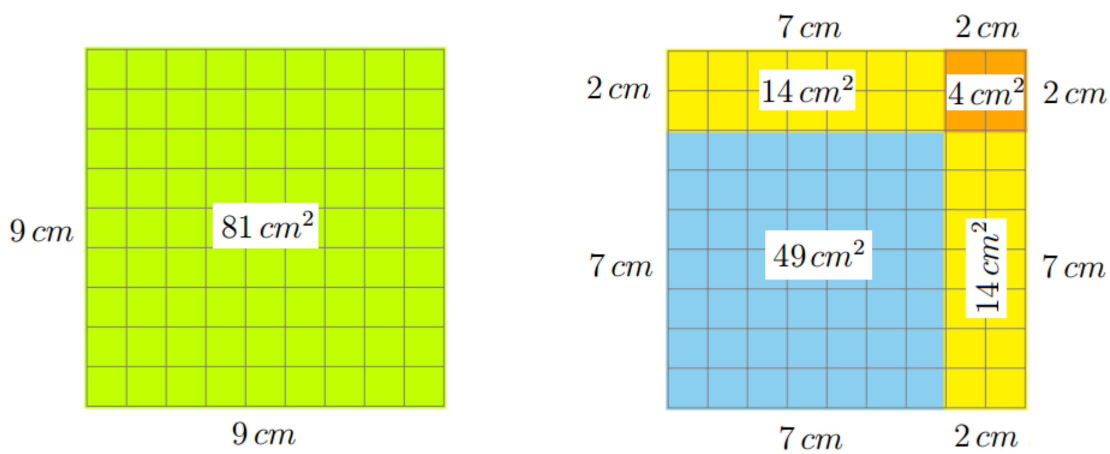
$$a + b$$

Por lo tanto, el cuadrado de binomio es, simplemente, elevar al cuadrado la expresión anterior, lo cual podemos desarrollar y llegar a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b)\\ &= a^2 + ab + ba + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Uno de los errores más clásicos es confundirse y pensar que $(a+b)^2 = a^2 + b^2$. **¡Esto es un error garrafal!** Para entender que son distintos, se puede ver el cuadrado de binomio de manera geométrica.

Sabemos que $9\,cm \cdot 9\,cm = 81\,cm^2$ pero si descomponemos 9 cm como la suma de $7\,cm + 2\,cm$



Los 81 cm^2 del lado izquierdo equivalen a la suma de las 4 áreas del lado derecho.

$$\begin{aligned}\colorbox{lime}{$(7+2)^2$} &= (7+2)\cdot(7+2)\\ &= 7\cdot 7 + 7\cdot 2 + 2\cdot 7 + 2\cdot 2\\ &= 7^2 + 2\cdot 7\cdot 2 + 2^2\\ &= \colorbox{skyblue}{49} + \colorbox{yellow}{28} + \colorbox{orange}{4}\\ &= 49 + 32\\ &= 81\end{aligned}$$

En resumen:

$$\colorbox{lime}{$(7+2)^2$} = \colorbox{skyblue}{7^2} + \colorbox{yellow}{$2\cdot 7\cdot 2$} + \colorbox{orange}{2^2}$$

Al generalizar, se obtiene la expresión del cuadrado del binomio:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si b es negativo cambia solo el signo del segundo término: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
En resumen:

$$\boxed{(a\pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

1.2. Suma por Diferencia

$$\boxed{(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2}$$

Al corroborar:

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b\\ &= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ab} - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

1.3. Binomios con Término Común

$$\boxed{(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + x\cdot(a+b) + ab}$$

Te invitamos a corroborrar este resultado.

1.4. Cuadrado de Trinomio

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

Al corroborar:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= ((a+b)+c)^2 \\ &= (a+b)^2 + 2\cdot(a+b)\cdot c + c^2 \\ &= (a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2) + 2\cdot a\cdot c + 2\cdot b\cdot c + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

Es importante notar que si se realiza la multiplicación termino a termino de $(a+b+c)\cdot(a+b+c)$ se obtiene **el mismo resultado.** Te invitamos a hacerlo:

1.5. Cubo de Binomio

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Al corroborar:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2\cdot(a+b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)\cdot(a+b) \\ &= a^2\cdot a + a^2\cdot b + 2ab\cdot a + 2ab\cdot b + b^2\cdot a + b^2\cdot b \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

¿Cómo sería el caso de $(a-b)^3$?

1.6. Suma de Cubos

$$\boxed{(a^3 + b^3) = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)}$$

Al corroborar:

$$\begin{aligned}
(a^3 + b^3) &= (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2) \\
&= a^2 \cdot a - a \cdot ab + a \cdot b^2 + b \cdot a^2 - b \cdot ab + b \cdot b^2 \\
&= a^3 - \cancel{a^2 \cdot b} + \cancel{a \cdot b^2} + \cancel{b \cdot a^2} - \cancel{a \cdot b^2} + b^3 \\
&= a^3 + b^3
\end{aligned}$$

1.7. Diferencia de Cubos

$$\boxed{(a^3 - b^3) = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}$$

Al corroborar:

$$\begin{aligned}
(a^3 - b^3) &= (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2) \\
&= a^2 \cdot a + a \cdot ab + a \cdot b^2 - b \cdot a^2 - b \cdot ab - b \cdot b^2 \\
&= a^3 + \cancel{a^2 \cdot b} + \cancel{a \cdot b^2} - \cancel{b \cdot a^2} - \cancel{a \cdot b^2} - b^3 \\
&= a^3 - b^3
\end{aligned}$$

2. Factorización

La **Factorización** es una técnica que consiste en la descomposición de una expresión matemática en forma de producto. Es súper similar a los productos notables. El objetivo es **reescribir la expresión en términos de bloques fundamentales**, que reciben el nombre de **factores**.

2.1. Monomio

$$\boxed{a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (c + d)}$$

2.2. Binomio

$$\boxed{(a + b) \cdot c + (a + b) \cdot d = (a + b) \cdot (c + d)}$$

2.3. Diferencia de Cuadrados

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)}$$

2.4. Suma/Diferencia de Cubos

$$\boxed{(a^3 - b^3) = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)}$$

$$\boxed{(a^3 + b^3) = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)}$$

Les dejamos una linda tabla/resumen. Noten que hay una **similitud en ciertos productos notables y factorización**. ¡Esto no es coincidencia! Los productos notables son multiplicaciones, vistas desde un sentido (factor - factor⟶producto), mientras que la factorización es verlo desde el camino inverso (producto⟶factor - factor).

Producto Notable	**Expresión Algebraica**	**Factorización**
	$a \cdot c + a \cdot d = a \cdot (c + d)$	Monomio
Cuadrado de Binomio	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	
Suma por Diferencia	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$	Diferencia de Cuadrados
Binomios con Término Común	$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + x \cdot (a + b) + ab$	Binomio
Cuadrado de Trinomio	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	
Cubo de Binomio	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	
Suma/Diferencia de Cubos	$(a^3 \pm b^3) = (a \pm b) \cdot (a^2 \mp ab + b^2)$	Suma/Diferencia de Cubos

3. Simplificación Algebraica

3.1. Fracciones Algebraicas

En el caso en el que el numerador y el denominador son monomios, **se cancelan los factores comunes.** Para eso se simplifican los coeficientes numéricos por separado de los factores literales, de manera muy similar a como vimos en la multiplicación. Veamos un ejemplo:

$$\frac{2a^3b^2}{6ab^5} = \frac{a^2}{3b^3}$$

En el caso en que el numerador y/o denominador no son monomios, **se factoriza el numerador y/o el denominador y se cancelan los factores comunes.** Esto ya que no se puede simplificar si hay una suma/resta de por medio. Solo los factores (es decir la multiplicación) permite simplificar las expresiones. Veamos un ejemplo:

$$\frac{x^2 + x}{x + 1} = \frac{x(x + 1)}{x + 1} = x$$

3.2. Multiplicación y División Algebraica

Para la multiplicación o división de fracciones algebraicas **funciona tal como lo hacen las fracciones numéricas**. Considerando a $\frac{M}{N}$ y $\frac{P}{Q}$ como fracciones algebraicas ($N \neq 0$ y $Q \neq 0$), podemos decir que:

$$\frac{M}{N} \cdot \frac{P}{Q} = \frac{M \cdot P}{N \cdot Q}$$
$$\frac{M}{N} : \frac{P}{Q} = \frac{M \cdot Q}{N \cdot P}$$

Combinando esto, se pueden resolver problemas que se presentan constantemente en la prueba, ya que se evalúa poder ser capaz de captar las estrategias dictadas por el DEMRE. Veamos un ejemplo:

$$\begin{aligned}
\frac{a-b}{a} : \frac{b^2 - a^2}{a \cdot b} &= \frac{a-b}{a} \cdot \frac{a \cdot b}{b^2 - a^2} \\
&= \frac{a-b}{a} \cdot \frac{a \cdot b}{(b+a)(b-a)} \\
&= \frac{(a-b) \cdot a \cdot b}{a \cdot (b+a)(b-a)} \\
&= \frac{\cancel{(a-b)} \cdot \cancel{a} \cdot b}{-\cancel{a} \cdot (a+b)\cancel{(a-b)}} \\
&= \frac{-b}{a+b}
\end{aligned}$$

3.3. Adición y Sustracción de Fracciones Algebraicas

Distinguimos dos casos para la adición/sustracción de expresiones algebraicas:

- **Caso 1:** En el caso de la adición y/o sustracción de expresiones algebraicas fraccionarias con **igual denominador** se obtendrá otra expresión algebraica fraccionaria con el mismo denominador y el numerador será el resultado de la operatoria correspondiente de todos los numeradores.

  Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{9}{x^2-3} + \frac{7}{x^2-3} - \frac{10}{x^2-3} &= \frac{9+7-10}{x^2-3} \\ &= \frac{6}{x^2-3} \end{aligned}$$

- **Caso 2:** Para el caso en que las expresiones algebraicas fraccionarias tengan **distinto denominador** se debe proceder de la siguiente manera:

  1. Se calcula el **mínimo común múltiplo (m.c.m.)** entre los denominadores.
  2. Se amplifica cada término de la expresiones algebraicas fraccionarias de manera que tengan como denominador el m.c.m.
  3. Se resuelven las operaciones entre las fracciones de igual denominador, tal y como lo hicimos en el **Caso 1**.

  Ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{x+7}{x-2} - \frac{x^2-5x}{x^2-4} &= \frac{(x+7)\cdot(x+2)}{\underbrace{(x-2)\cdot(x+2)}_{\text{m.c.m.}}} - \frac{x^2-5x}{x^2-4} \\ &= \frac{(x+7)\cdot(x+2)}{x^2-4} - \frac{x^2-5x}{x^2-4} \\ &= \frac{x^2+2x+7x+14}{x^2-4} - \frac{x^2-5x}{x^2-4} \\ &= \frac{x^2+9x+14-x^2+5x}{x^2-4} \\ &= \frac{14x+14}{x^2-4} \\ &= \frac{14(x+1)}{x^2-4} \end{aligned}$$

El mínimo común múltiplo entre dos o más expresiones algebraicas corresponde a la expresión de menor grado que es divisible por todas las expresiones involucradas.

Figura 1: Millarca Valenzuela

4. Científica Destacada: Millarca Valenzuela

Edith Millarca Valenzuela Picón nació en Antofagasta, el 9 de enero de 1977. Ella estudió geología en la Universidad de Chile y es doctora en ciencias, mención geología en la misma universidad.

Participó en la creación del primer sistema nacional de seguimiento y observación de meteoros que detecta los meteoritos que caen en el desierto de Atacama, llamado CHACANA (Chilean Allsky Camera Network for Astro-Geosciences). Es la única geóloga en Chile que estudia meteoritos hace más o menos 10 años. A través de las expediciones al desierto ha encontrado más de 500 ejemplares, teniendo una de las colecciones más grandes de America del Sur.

En 2009 Valenzuela fue elegida dentro de la red de líderes jóvenes por ser la única persona en Chile dedicada a la investigación de meteoritos.

El asteroide 11819 fue bautizado como Millarca y fue el primero en recibir el nombre de una geóloga chilena, en homenaje a las contribuciones de sus estudios en el área de los meteoritos.