Potencias

Eje temático: Números

Potencias de Exponente Entero

Definición

Cuando hablamos de **potencias**, nos referimos a la multiplicación reiterada de una **base** (a) indicada por su **exponente** (n). En esta guía solo veremos casos donde n $\mathbb{Z}$. La notación para referirnos a una potencia es: $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{n veces}} = a^n$ y se lee "a elevado a la potencia n", aunque también se le dice "a a la n".

En particular, si el exponente es 2, se dice que el número está "**al cuadrado**", mientras que si el exponente es 3, se dice que el número está "**al cubo**".

Propiedades Generales

Considerando a y b como números racionales, con $a = 0, b = 0$, m y n números enteros tendremos:

Definiciones:

- Exponente nulo:
$$a^0 = 1$$
- Exponente -1:
$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$
- Potencia de una potencia:
$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Igual Base:

- Multiplicación:
$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$
- División:
$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

Distinta Base, pero igual exponente:

- Multiplicación:
$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$
- División:
$$a^n : b^n = (a : b)^n$$

Implicancias directas de las definiciones anteriores

- Exponente igual a 1:
$$a^1 = a$$
- Base igual a 1:
$$1^n = 1$$
- Exponente negativo genérico:
$$a^{-n} = (a^{-1})^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1^n}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$
- Base -1:
$$(-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es par} \\ -1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Observación: 0^0 no está definido.

Podemos notar que de estas propiedades surge la necesidad de establecer algunas de las definiciones previamente dadas. Por ejemplo,

- $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$
- $a^{-n} = a^{0-n} = \dfrac{a^0}{a^n} = \dfrac{1}{a^n}$
- $0^0 = 0^{n-n} = \dfrac{0^n}{0^n} = \dfrac{0}{0}$, lo cual no está definido

Notemos que si $a^n = b^n$ y, además, $a = 0, b = 0, n = 0$, entonces $|a| = |b|$. Por otro lado, si $a^n = a^m$ y, además, $a = 0$ y $a = 1$, entonces $n = m$.

Ejercicio: ¿Cuál de los siguientes números es mayor? $2^{70}, 7^{30}, 13^{20}$

En este ejercicio, vamos a usar la propiedad de "potencia de una potencia", pero a la inversa, es decir, vamos a separar el exponente hasta llegar a un exponente común y después hacer una comparación entre los números:

$$2^{70} = 2^{7\cdot 10} = (2^7)^{10} = 128^{10}$$
$$7^{30} = 7^{3\cdot 10} = (7^3)^{10} = 343^{10}$$
$$13^{20} = 13^{2\cdot 10} = (13^2)^{10} = 169^{10}$$

por lo que se ve que 7^{30} es, claramente, mayor que los otros dos números.

Es muy importante saberse las propiedades, pero también es clave **saber cuándo ocuparlas**, ya que en este caso hubo que ser un poco más creativo, pues no era claro como proceder o empezar.

Tabla Resumen

Propiedad	**Ejemplo**
$a^0 = 1$	$3^0 = 1$
$a^1 = a$	$2^1 = 2$
$1^n = 1$	$1^6 = 1$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$	$7^{-1} = \frac{1}{7}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2} = \frac{5^2}{4^2}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4}$
$a^n : a^m = a^{n-m}$	$3^5 \cdot 3^3 = 3^{5-3}$
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$4^5 \cdot 5^5 = (4 \cdot 5)^5 = 20^5$
$a^n : b^n = (a : b)^n$	$12^3 : 4^3 = (12 : 4)^3 = 3^3$
$(-1)^n = 1$ si n es par.	$(-1)^4 = 1$
$(-1)^n = -1$ si n es impar.	$(-1)^5 = -1$

Notación Científica

Se utiliza para **abreviar números muy grandes o muy pequeños**, dejándolos en una expresión de un número real entre 1 y 10 (sin contar el 10), por una potencia de 10.

Ejemplos:

- 0,000000000015 escrito en notación científica sería: 1,5 $\cdot 10^{-11}$
- 6300000000 escrito en notación científica sería 6,3 $\cdot 10^{9}$

Se utilizan mucho en ciencia, para abreviar números.

Ejercicio: Escribe 42000 y 0,091 en notación científica.

Operatoria con Notación Ciéntifica

Para poder sumar o restar números en notación científica **debemos hacer que las potencias de 10 sean iguales** y sumar o restar respectivamente.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 1,54 \cdot 10^3 + 8,4 \cdot 10^2 &= (15,4 + 8,4) \cdot 10^2 \\ &= 23,8 \cdot 10^2 \\ &= 2,38 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcula la siguiente expresión: $6,43 \cdot 10^2 - 5,13 \cdot 10^4$

Para poder multiplicar o dividir números en notación científica debemos **multiplicar los números y las bases de forma separada, respetando las propiedades de las potencias**. Finalmente, se debe verificar si el resultado está en notación científica.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} (8,4 \cdot 10^3) \cdot (2,1 \cdot 10^{-5}) &= (8,4 \cdot 2,1) \cdot (10^3 \cdot 10^{-5}) \\ &= 17,64 \cdot 10^{3-5} \\ &= 17,64 \cdot 10^{-2} \\ &= 1,764 \cdot 10^{-1} \end{aligned}$$

Ejercicio: Calcula la siguiente expresión: $(5,1 \cdot 10^3) : (1,7 \cdot 10^{-5})$

Tabla de Potencias de Base Diez

Potencia de Base 10	Resultado
$10^{-4} = \frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10.000} = 0{,}0001$
$10^{-3} = \frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{1.000} = 0{,}001$
$10^{-2} = \frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{100} = 0{,}01$
$10^{-1} = \frac{1}{10^1}$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$
10^0	1
10^1	10
10^2	100
10^3	1.000
10^4	10.000

Prefijos

Para simplificar la notación, en muchos casos se usan prefijos para **describir que un número está multiplicado por cierta potencia de diez**. Por ejemplo, el prefijo *kilo* representa multiplicar por 10^3. Así, 30 km (*kilo-metros*) son $30 \cdot 10^3$ m (metros).

Dejamos una tabla de los prefijos que hay que saberse y que se van a usar en la prueba:

Prefijo	Símbolo	Potencia
Kilo	k	10^3
Deca	da	10^1
Deci	d	10^{-1}
Centi	c	10^{-2}
Mili	m	10^{-3}

Existen más prefijos que hablan de cantidad mucho mayores o menores. Por ejemplo, el prefijo *Tera*, usado para memoria computacional, representa 10^{12}. También, está el prefijo *Nano*, usado en biología celular, para describir tamaños de organelos, representa 10^{-9}.

Interés

Un problema clásico es el de **interés**. Por ejemplo, una persona puede **depositar dinero en un banco con una tasa de interés mensual** (generalmente, calculada en %, esto significará que cada mes, el dinero depositado aumentará según la tasa del banco.

Veamos los dos tipos de intereses que existen:

Interés Simple

En este caso, **la tasa de interés se aplica solamente sobre el capital inicial**, y en cada período de la operación (puede ser diario, mensual, semestral, anual, etc), **se suma el mismo interés** sobre el capital.

Entonces, si una persona deposita C_I (capital inicial), en un banco con tasa de interés simple mensual de 1 %, al cabo del primer mes su capital final C_F sería:

$$C_F = C_I + \frac{1}{100} \cdot C_I = C_I \left(1 + \frac{1}{100} \right)$$

luego, al cabo del n-ésimo mes, el capital final es:

$$C_F = C_I + \underbrace{\frac{1}{100} \cdot C_I + \ldots + \frac{1}{100} \cdot C_I}_{\text{n veces}} = C_I \left(1 + \frac{1}{100} \cdot n \right)$$

por lo que, en el caso general, donde la tasa de interés es i %, se tiene que la fórmula para calcular el capital final C_F luego de n períodos de tiempo, con capital inicial C_I es:

$$C_F = C_I (1 + \frac{i}{100} \cdot n)$$

Notamos también, que **si sabemos 3 de las 4 variables, es posible calcular la que falta**. Por ejemplo, si nos preguntan cuánto tengo que depositar en un banco con 1 % de interés semestral, para que en 2 años tenga \$5.200, se debe notar que lo que se busca es el capital inicial, ya que: $C_F = \$5{,}200$, $i = 1$ y $n = 4$, ya que se reajusta semestralmente, por lo que en 2 años se reajustaría 4 veces en total. Por ende:

$$\$5{,}200 = C_I (1 + \frac{1}{100} \cdot 4)$$

Luego, despejando se obtiene: $C_I = \$5{,}000$

Interés Compuesto

En este otro caso, la tasa de interés no solo se aplica sobre el capital inicial, sino que **se va aplicando al capital actual**. Es decir, si una persona deposita C_I a un banco con interés compuesto mensual de 1 %, al cabo de 1 mes, el capital final C_F es:

$$C_F = C_I + \frac{1}{100} \cdot C_I = C_I \left(1 + \frac{1}{100} \right)$$

Notamos que en la primera operación, nada cambia con el interés simple, pero veamos qué pasa al cabo del segundo mes:

$$
\begin{aligned}
C_F &= C_I + \frac{1}{100}\cdot C_I + \frac{1}{100}\underbrace{\left(C_I + \frac{1}{100}\cdot C_I\right)}_{\text{capital al cabo de 1 mes}} \\
&= C_I\left(1+\frac{1}{100}\right) + \frac{1}{100}\left(C_I\left(1+\frac{1}{100}\right)\right) \\
&= C_I\left(1+\frac{1}{100}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right) \\
&= C_I\left(1+\frac{1}{100}\right)^2
\end{aligned}
$$

Finalmente, se puede concluir que, para el caso general, donde el capital inicial es C_I, la tasa de interés compuesto es $i\,\%$ y el número de períodos de tiempo donde el interés actúa es n, la fórmula para calcular el capital final C_F es:

$$C_F = C_I\left(1+\frac{i}{100}\right)^n \tag{1}$$

Con C_F: Capital Final, C_I: Capital Inicial, i: interés y n: número de veces.

Por ejemplo, nos preguntan cuánto dinero se tendrá luego de 1 año si se invierten \$2.000 en un seguro con reajuste del 10 % de interés compuesto trimestral. En este caso, se busca el Capital Final, y se tiene que $C_I = \$2{,}000$, $i = 10$ y $n = 4$ (ya que se reajusta trimestralmente, por lo que en 1 año se reajusta 4 veces en total). Luego:

$$C_F = 2{,}000\cdot\left(1+\frac{10}{100}\right)^4$$

Finalmente, despejando se obtiene: $C_F = \$2{,}928$