Logaritmos

Eje temático: Números

Logaritmos

Definición

Hasta el momento hemos aprendido distintas propiedades para el cálculo de potencias y raíces. **¿Qué pasaría si sólo tuviésemos la base de una potencia, su resultado y no su exponente?**

Por ejemplo, supongamos que estás ahorrando para comprar un regalo. En un principio, en la cuenta de ahorro tienes 10.000 pesos y el banco te dice que cada mes que pase ese valor aumentará en un 5 %. ¿Cuánto tardarás en tener 20.000 pesos?

Planteando el problema tendríamos que:
Aumentar una cantidad en un 5 %, es equivalente a multiplicar dicha cantidad por 1,05. Entonces nuestro problema quedaría descrito por:

$$\begin{aligned}
&\text{total mes } 0 = 10.000\\
&\text{total mes } 1 = 10.000 \cdot 1{,}05\\
&\text{total mes } 2 = 10.000 \cdot 1{,}05 \cdot 1{,}05 = 10.000 \cdot (1{,}05)^2\\
&\text{Luego generalizando se tendría}\\
&\text{total mes } n = 10.000 \cdot (1{,}05)^n
\end{aligned}$$

Notemos que el *mes* 0 correspondería al primer mes, el *mes* 1 al segundo, y así sucesivamente.
Como queremos recaudar 20.000 pesos, la expresión que sintetiza lo recaudado luego de n meses que nos permitan llegar a ese monto es:

$$10.000 \cdot (1,05)^n = 20.000$$

¡Lo anterior es una ecuación! Hasta ahora no hemos visto ecuaciones, próximamente lo repasaremos (en las guías de álgebra y funciones), pero tiene sentido pensar que el valor n, que corresponde a los meses, es nuestra incógnita.
Si dividimos en ambos lados de la equivalencia por 10.000, nuestro problema se reduce a:

$$10.000 \cdot (1,05)^n = 20.000 \longrightarrow 1{,}05^n = 2$$

Lo que tenemos es una potencia y su resultado: la base es 1,05, el exponente es n y el resultado es 2. Veamos que no es tan simple de resolver esto, como lo habríamos hecho igualando las bases: Si la ecuación anterior fuera de la forma:

$$2^x = 8$$

podemos igual bases y tendriamos que $2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$ es su única solución, como vimos en la guía de potencias.

Volviendo a nuestra problemática, acá no hay una manera evidente para igualar las bases, por lo tanto, esa metodología no nos ayudará a resolver el problema.

Y como ya intuyen... a alguien se le ocurrió solucionar esto de una ingeniosa manera: El método de cálculo mediante logaritmos fue propuesto por primera vez, públicamente, por **John Napier** en el año 1614, teniendo directa aplicación en todas las ciencias.

Probablemente muchos han pensado a lo largo de su enseñanza media... ¿y para qué sirven los logaritmos? Precisamente para **resolver problemas donde se desconozca el exponente**. Los **logaritmos** están definidos como el **número al cual debo elevar la base para llegar a un resultado**.

Mediante el uso de los logaritmos podemos determinar a qué potencia está elevado un número, sabiendo este y su resultado. Esto se puede hacer ya que **el logaritmo es su operación inversa a elevar una potencia**.

El logaritmo de un número real positivo b (al cual llamamos **argumento**) en **base** a, **positiva y distinta de 1**, es el **número c al que se debe elevar la base para obtener dicho número**.

$$a^c = b \Longleftrightarrow \log_a b = c, \quad b > 0, \ a > 0 \text{ y } a \neq 1$$

La expresión $\log_a b = c$ se lee **"logaritmo de b en base a es igual a c"**.

¿Cómo aplicamos esta maravillosa herramienta a nuestro problema? Identifiquemos los valores del problema inicial:

$a = 1{,}05$ sería la base de nuestro problema, cumple con que es positiva y distinta de 1

$b = 2$ sería el resultado de nuestro problema, cumple con que es positivo

$c = n$ que sería nuestra incógnita, y es el exponente que desconocemos

Nuestro problema termina siendo de la forma:

$$1,05^n = 2 \Longleftrightarrow \log_{1,05} 2 = n$$

¡Genial! Pudimos **despejar nuestra incógnita** y para saber el resultado numérico habría que ingresarlo en una calculadora, por lo que en muchas preguntas de la PTU, las alternativas estarán expresadas con logaritmos.

Propiedades generales

Veamos ahora las propiedades generales de los logaritmos:

Recordando la definición:

$$\log_a b = c \Longleftrightarrow a^c = b$$

Para cualquier $a > 0$ con $a \neq 1$, se cumple que:

- $\log_a 1 = 0$, pues $a^0 = 1$
- $\log_a a = 1$, pues $a^1 = a$
- $\log_a a^m = m$, pues $a^m = a^m$
- $\log_a \frac{1}{a^m} = \log_a a^{-m} = -m$

Implicancias

Las propiedades que se muestran a continuación muchas veces nos serviran para **simplificar las expresiones o realizar el calculo de los logaritmos**. Sean a, b y c números que cumplen con las condiciones definidas anteriormente, entonces:

- Logaritmo de un **producto**:
$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$
- Logaritmo de un **cuociente**:
$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$
- Logaritmo de una **potencia**:
$$\log_a b^m = m \log_a b$$
- Logaritmo de una **raíz**: (con $n \neq 0$)
$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$
- **Cambio de Base**:
$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$
.
Esta propiedad nos permite cambiar la base de un logaritmo a cualquier base c. En muchos problemas, dará lo mismo la base que usemos, mientras que en otros, habrá que elegir c convenientemente.
- Relación de Igualdad:
$$\log_a x = \log_a y \Longleftrightarrow x = y$$

Por convención, cuando se tiene que la base es 10, el logaritmo se denota sin base:

$$\log a = \log_{10} a$$

¡Ojo! $\log_a(0)$ no tiene un valor real.

Ejemplos

Ejemplo 1: Calcule:

$$1 - \log 5 - \log 2$$

Notamos que:

$$\begin{aligned}
1 - \log 5 - \log 2 &= 1 - (\log 5 + \log 2) && \text{/ aplicamos logaritmo del producto} \\
&= 1 - \log 5 \cdot 2 \\
&= 1 - \log 10 && \text{/ notamos que } \log 10 = \log_{10} 10 = 1 \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ejemplo 2: Calcule:

$$\log 36 - \log_2 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log 6$$

Primero, notemos que la expresión $\log_2 5 \cdot \log_5 4$ se puede trabajar de la siguiente forma: podemos aplicar un cambio de base y dejar todo en base 10 (hay que notar que en este caso da lo mismo la base que use), entonces queda:

$$\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} \qquad \log_5 4 = \frac{\log 4}{\log 5}$$

Por lo tanto, su multiplicación será:

$$\begin{aligned}
\log_2 5 \cdot \log_5 4 &= \frac{\log 5}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 5} \\
&= \frac{\cancel{\log 5}}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\cancel{\log 5}} \\
&= \frac{\log 4}{\log 2}
\end{aligned}$$

Como es una división de logaritmos de una misma base, se puede aplicar la propiedad del cambio de base a la inversa, por lo tanto:

$$\frac{\log 4}{\log 2} = \log_2 4 = 2$$

Luego, podemos calcular lo que nos piden en el enunciado:

$$\begin{aligned}\log 36 - \log_2 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log 6 &= \log 36 - 2 \cdot \log 6 \quad \text{/ Aplicamos logaritmo de una potencia}\\ &= \log 36 - \log 6^2\\ &= \log 36 - \log 36\\ &= 0\end{aligned}$$

<u>Ejemplo 3:</u> ¿Cuáles de las siguientes expresiones son correctas?

- I) $\log(1/100) < 0$
- II) $\log(1) \cdot \log(8) = \log(8)$
- III) si $x > 0, y > 0, z > 0$ y $\log(x) - \log(y) + \log(z) = 1$, entonces el valor de $(x \cdot z)/y$ es 10
- IV) La ecuación $\log(3x - 20) = \log(16 - x)$ no tiene solución en los reales.

I) Notemos que:

$$\begin{aligned}\log(1/100) &= \log(1/(10 \cdot 10))\\ &= \log\Big(1/(10^2)\Big)\\ &= \log\Big(10^{-2}\Big) \quad \text{Aplicamos que } \frac{1}{a} = a^{\,-1}\\ &= -2 \qquad\qquad \text{Usando que } \log_a(a^x) = x\end{aligned}$$

Luego como $-2 < 0$, la proposición I) es verdadera.

II) Es importante recordar que $\log(1) = 0$ para cualquier base, ya que $x^0 = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned}\log(1) \cdot \log(8) &= 0 \cdot \log(8)\\ &= 0\end{aligned}$$

Luego la proposición II) es falsa.

III) Antes de resolver el cuociente, despejemos la ecuación:

$$\log(x) - \log(y) + \log(z) = 1$$
$$\log\left(\frac{x}{y}\right) + \log(z) = 1 \qquad \text{Aplicamos } \log(a) \text{ - } \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$$
$$\log\left(\frac{x \cdot z}{y}\right) = 1 \qquad \text{ya que } \log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$$

Recordando que si $\log_a(b) = c$, entonces $a^c = b$

$$10^1 = \frac{x \cdot z}{y} \qquad \text{ya que } x, y, z > 0$$

Entonces, la proposición III) es verdadera.

IV) Para resolver este ejercicio usaremos la propiedad:

$$\log x = \log(y) \iff x = y$$

Por lo tanto, igualando tenemos:

$$(3x - 20) = (16 - x)$$
$$3x + x = 16 + 20$$
$$4x = 36$$
$$x = \frac{36}{4} = 9$$

Notemos que $3x - 20 = 3 \cdot 9 - 20 = 27 - 20 = 7 > 0$

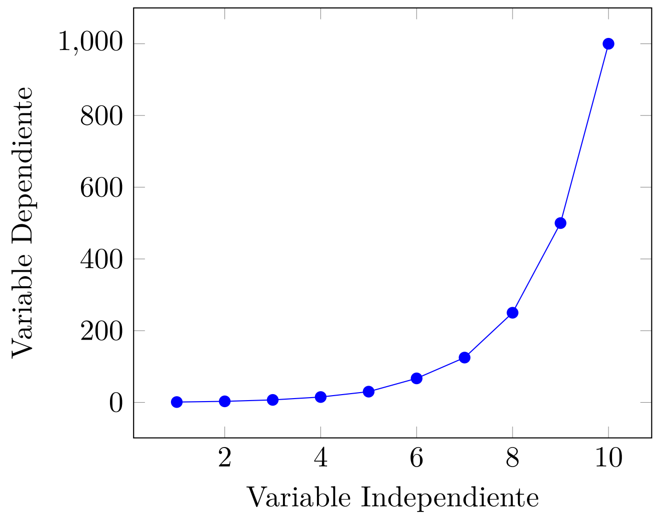
y $16 - x = 16 - 9 = 7 > 0$, por lo que el logaritmo esta bien definido

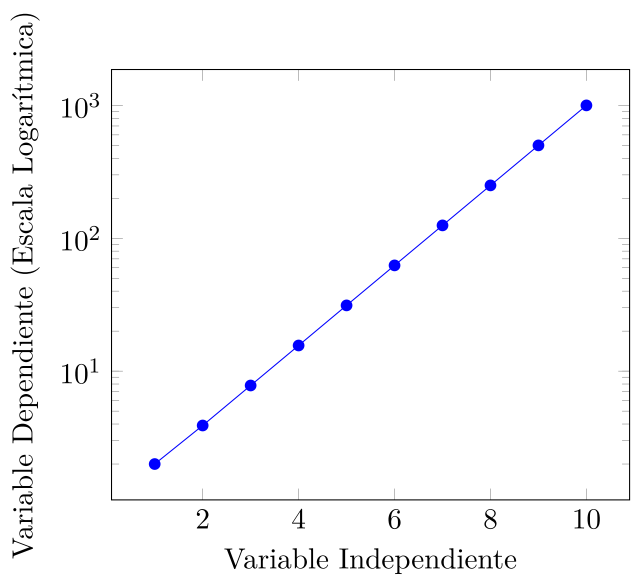
Luego la proposición IV) es falsa.

Aplicaciones

A menudo se piensa que los logaritmos no tienen aplicación concreta en la vida cotidiana, sin embargo, ¡esto no cierto!. Los logaritmos nos permiten comparar de manera más fácil números con órdenes de magnitud muy distintos entre sí.

Acá se puede apreciar un típico ejemplo en donde se aplican los logaritmos. En ocasiones donde se tienen datos recopilados, y en particular tienen una tendencia exponencial, para poder visualizarlos se usa la escala logarítmica, como se aprecia a continuación.





Las aplicaciones de los logaritmos son variadas, estos nos permiten, por ejemplo, comparar los brillos de las estrellas en astronomía, determinar el grado de ácidez (pH) e incluso medir la energía liberada por un sismo.

Figura 1: Chien-Shiung Wu

1. Científica Destacada: Chien-Shiung Wu

Chien-Shiung Wu nació en 1912 en un pueblo pequeño a 40 km de Shangai, en una época en la que las mujeres no tenían derecho a la educación. Sin embargo, su padre creó una escuela para chicas. Fue la primera de su clase, siendo dos años más joven que el resto. El problema se produjo una vez concluidos sus estudios primarios ya que en el pueblo donde su familia vivía no había ninguna otra escuela para chicas. Afortunadamente, su abuela decidió que su nieta debía seguir estudiando.

En 1930, con la amenaza de la invasión inminente de Japón, Chien-Shiung Wu y otros estudiantes encabezaron una manifestación que terminó con la ocupación de la mansión presidencial en Nanking para exigir el acceso de las mujeres a la universidad. En el verano de dicho año recibió una carta de aceptación de la universidad de Nanking. Consiguió licenciarse cuatro años más tarde. Su pasión por la física le hizo trasladarse a Shangai, donde comenzó su carrera de investigación. Al no haber programas de doctorado en China, decidió viajar.

Chien-Shiung Wu llegó a EE.UU. en 1936 e inició su doctorado en el campo de la física nuclear. Sus extraordinarias facultades intelectuales la convirtieron en una experta en su campo. Cuando la II Guerra Mundial estalló y se formó el grupo para liderar el proyecto Manhattan, Chien-Shiung Wu fue excluida. Japón acababa de bombardear Pearl Harbor y la diferencia étnica entre chinos y japoneses no era evidente. Por este motivo, Chien-Shiung Wu tuvo que soportar, además del clásico y pertinaz machismo, un brote xenófobo.

En 1956, dos científicos de Harvard, Lee y Yang, publicaron un artículo en el que cuestionaron teóricamente la simetría especular en la fuerza débil del núcleo atómico. Estos dos científicos contactaron con Chien-Shiung Wu. La científica china en menos de un año realizó experimentos que demostraron que, efectivamente, el principio de la paridad no se cumplía en la naturaleza. En 1957 Lee y Yang recibieron el premio Nobel, pero quedó excluida Chien-Shiung Wu.