Circunferencias

Eje temático: Geometría

Circunferencias

Motivación

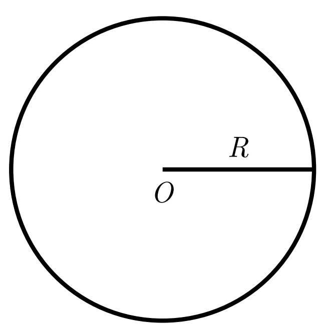
La naturaleza está llena de objetos geométricos, como triángulos, círculos, cuadrados, cubos, espirales, etc. Las circunferencias y los círculos los podemos apreciar cuando observamos el Sol y la Luna cuando está en su fase de llena. También los vemos cuando lanzamos una piedra en una superficie de agua tranquila y esta genera patrones de ondas que se alejan a la misma distancia y rapidez desde el inicio de la perturbación.

Figura 1: Los frentes de onda son círculos concéntricos que viajan alejándose de la fuente.

Definiciones

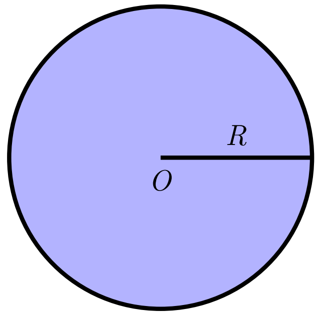
- **Circunferencia**

  La **circunferencia** es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo, llamado centro, es constante. La distancia constante se llama **radio** y se simboliza por R.



- **Círculo**

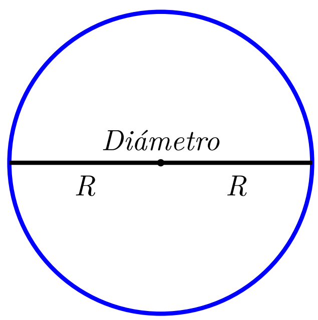
  Por otro lado, el **círculo** es una región del plano delimitada por una circunferencia y, por tanto, tiene asociada un área.



Perímetro de una Circunferencia

El interés por conocer la longitud de una circunferencia surge en Babilonia. Cuando usaban los carros con ruedas, era primordial relacionar el radio con la circunferencia.

El **perímetro** de una circunferencia es el largo de la sección circular (color azul) y el diámetro es el doble del radio (representado por negro):

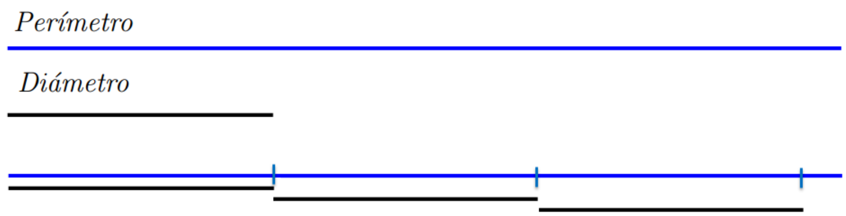


Independiente del valor del radio, siempre se cumple la relación en que el perímetro de un círculo dividido por el diámetro es una constante llamada Pi:

$$\pi = \frac{\text{Perímetro}}{\text{Diámetro}}$$

El valor de π se ha obtenido con diversas aproximaciones a lo largo de la historia, siendo una de las constantes matemáticas que más aparece en las ecuaciones de la física.

Al extender el perímetro de la circunferencia anterior linealmente, podemos apreciar que el diámetro cabe un poco menos de 3 veces:



Por esta razón el número Pi no es un número entero, ya que el diámetro cabe 3,1415926... veces en el perímetro, de hecho es un número irracional.

Según la NASA[1], para realizar sus cálculos más precisos -aquellos que tienen que ver con vuelos interplanetarios- los científicos utilizan 15 decimales de π . En la gran mayoría de los problemas físicos este valor es más que suficiente para describir correctamente la realidad: $\pi = 3,14$.

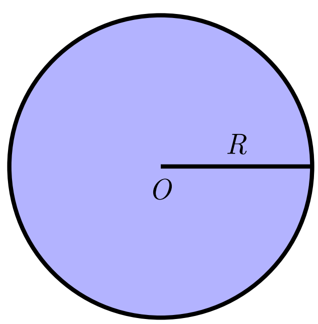
El perímetro (P) de una circunferencia de radio R es

$$P = 2\pi R$$

El término perímetro puede ser utilizado tanto para la distancia o longitud, como para la longitud del contorno de una forma. El perímetro de un círculo se llama longitud de la circunferencia.

Área de un Círculo

El **área** (A) de un círculo de radio R está representada en el siguiente diagrama por el color azul:



Su presentación matemática es de la forma:

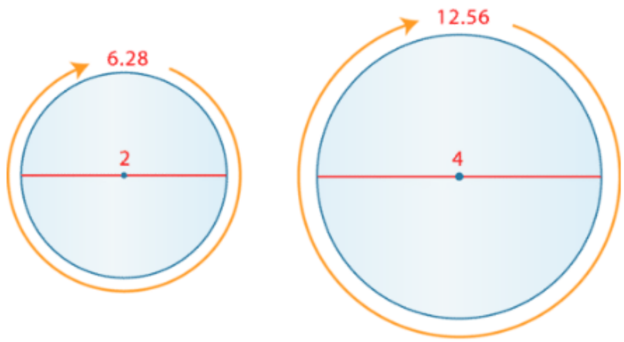
$$\boxed{A = \pi R^2}$$

[1] https://www.jpl.nasa.gov/edu/news/2016/3/16/how-many-decimals-of-pi-do-we-really-need

Ejemplo 1: ¿Cuál es el perímetro de dos círculos de radio 1 y 2 cm?

Solución: Ocupando la fórmula del perímetro.

$$P_1 = 2\pi R_1 = 2 \cdot 3,14 \cdot 1\ cm = 6,28\ cm$$
$$P_2 = 2\pi R_2 = 2 \cdot 3,14 \cdot 2\ cm = 12,56\ cm$$



Ejemplo 2: Un tarro de café en polvo es un cilindro cuya sección transversal es un círculo de radio 5 centímetros. Si un tarro lo hago rodar por una superficie plana sin resbalar, ¿cuántas vueltas tiene que dar para recorrer una distancia lineal de 4 metros?

Solución: En una vuelta recorre el perímetro del círculo.

$$P = 2\pi R = 2\pi \cdot 5\ cm = 10\pi\ cm = 31,4\ cm$$

El número de vueltas n es nuestra incógnita. Sabemos que debe recorrer 4 metros = 400 centímetros. Entonces planteamos la siguiente equivalencia.

$$\text{Número de vueltas} \cdot \text{Distancia una vuelta} = \text{Distancia a recorrer}$$

Reemplazamos nuestros datos y nuestra incógnita:

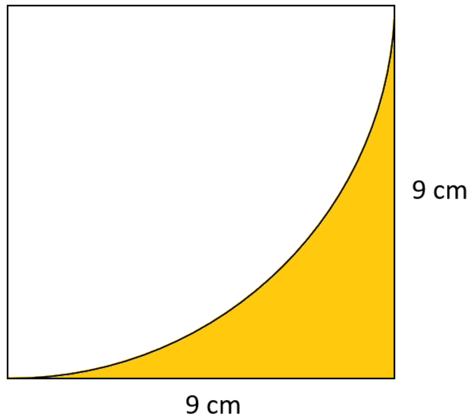
$$n \cdot 31,4\ cm = 400\ cm$$

despejamos:

$$n = \frac{400\ cm}{31,4\ cm} = 12,7$$

Entonces debe hacer 12,7 vueltas aproximadamente para recorrer 4 metros.

Ejemplo 3: En un cuadrado de lado 9 centímetros se inscribe un cuarto de circunferencia como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es el área, en cm^2, de color amarillo?

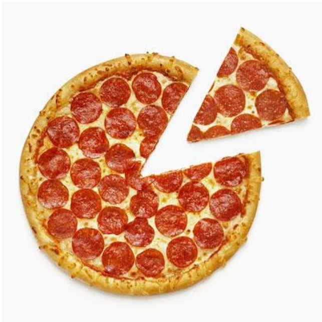


Solución: El área buscada, representada de color amarillo, es la resta del área del cuadrado con la cuarta parte de un círculo de radio 9 centímetros.

$$
\begin{aligned}
&A = A_{cuadrado} - A_{círculo}\\
&A = Lado^2 - \frac{\pi R^2}{4}\\
&A = 9\,cm \cdot 9\,cm - \frac{3,14 \cdot (9\,cm)^2}{4}\\
&A = 81\,cm^2 - 63,6\,cm^2\\
&A = 17,4\,cm^2
\end{aligned}
$$

Sector Circular

Cuando se come una pizza, lo común es cortar un triángulo con el borde circular como en la siguiente figura:



Esa figura tiene un nombre y se le llama sector circular. Un sector circular corresponde a la porción del círculo determinada por un ángulo central formado por dos radios, delimitada por un arco.

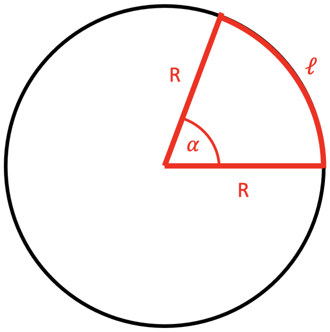


Figura 2: Sector Circular con radio R, ángulo α y arco ℓ.

Perímetro y Área de un Sector Circular

Para calcular el perímetro y el área de un sector circular lo primordial es recordar las fórmulas de perímetro y área de una circunferencia de radio R:

$$\text{Perímetro Circunferencia } \; P = 2\pi R$$

$$\text{Área Circunferencia } \; A = \pi R^2$$

Cuando hablamos de sectores circulares, nos referimos a un porcentaje del total de la circunferencia. Si el ángulo α vale 360°, entonces recuperamos la circunferencia. Si el ángulo α vale 180°, es decir, esta corresponde a media circunferencia. Si el ángulo α vale 90°, es decir, esta corresponde a un cuarto de circunferencia.

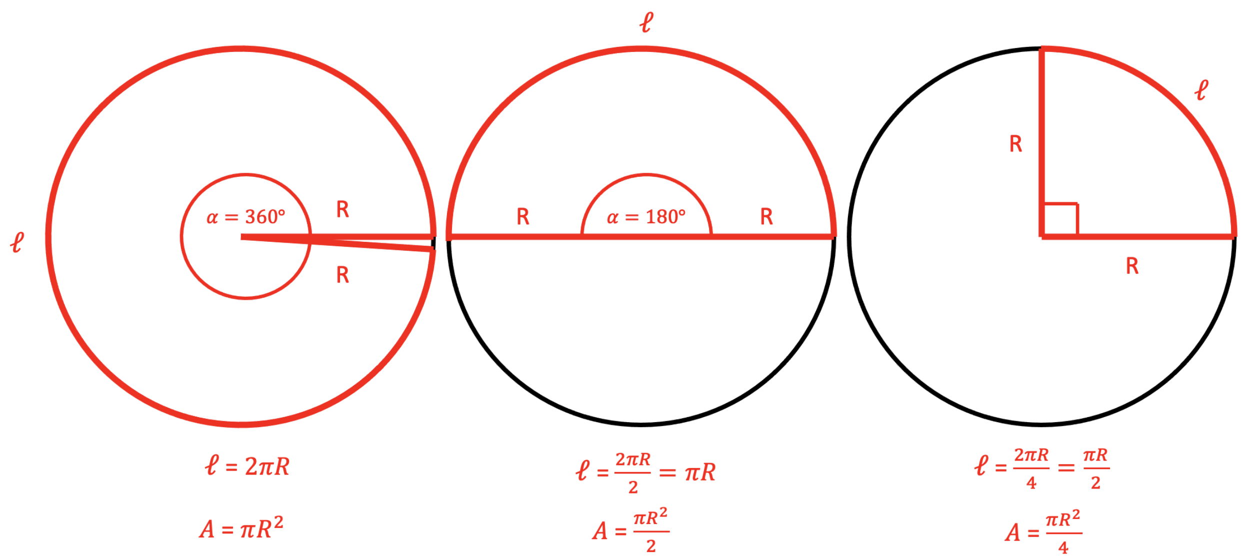
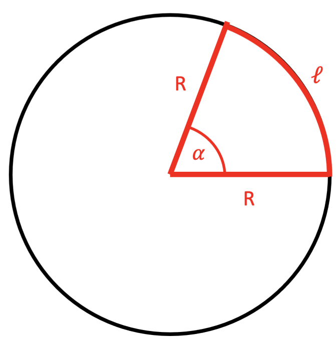


Figura 3: Sectores circulares con $\alpha = 360°$, $180°$ y $90°$ respectivamente. Se aprecian también los valores de sus arcos y áreas, las cuales son una fracción del perímetro y área original respectivamente.

Vemos entonces que los arcos y las áreas de los sectores circulares corresponden a una fracción de los perímetros y áreas de la circunferencia original. ¿Existe alguna forma de obtener directamente estos valores? ¡Sí!



En cualquier sector circular, se puede calcular el largo del arco utilizando proporciones:

$$\frac{\ell}{\text{Perímetro Circunferencia}} = \frac{\alpha}{360°}$$

Lo que tiene sentido, ya que si $\alpha = 360°$, se recupera que $\ell =$Perímetro. Por ende, si despejamos ℓ, se obtiene que:

$$\ell = \frac{\alpha}{360°} \cdot \text{Perímetro Circunferencia} = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi R$$

Por ende, como el sector circular está compuesto por dos radios y el arco, el perímetro final corresponde a:

$$\text{Perímetro Sector Circular} = 2R + \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R$$

Con el área del sector circular ocurre algo similar, se tiene que esta es una fracción del sector circular:

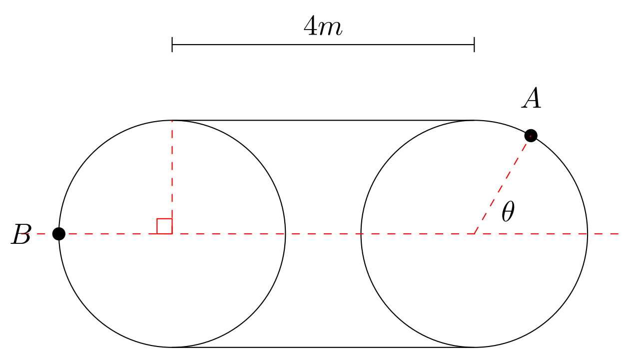
$$\frac{\text{Área Sector Circular}}{\text{Área Circunferencia}} = \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Por ende:

$$\text{Área Sector Circular} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \text{Área Circunferencia} = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi R^2$$

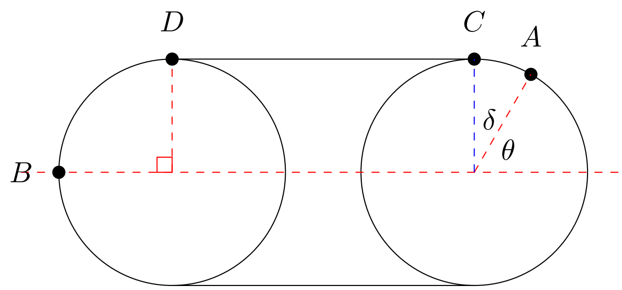
Ejercicio Resuelto:

Considere la pista de atletismo que se presenta a continuación, a cual está compuesta por dos circunferencias con radios de $4/\pi$ metros, y dos pistas paralelas de 4 metros de longitud. Sabiendo que el trayecto desde A hasta B tiene una longitud de 7 metros, ¿Cuál es el valor del ángulo θ definido por el punto de partida y la horizontal?



Solución:

Considerando las características dadas por el problema, para determinar el valor del ángulo θ es necesario descomponer la línea en los trazos que se presentan a continuación:



Sabiendo que el trazo DC mide 4 metros, es necesario calcular las longitudes de los arcos BD y AC de las circunferencias. Para ello, sabiendo que el ángulo del arco BD es 90°, es posible obtener la longitud del arco:

$$\ell_{BD} = 2\pi R \frac{90^\circ}{360^\circ}$$
$$\ell_{BD} = 2\pi \frac{4}{\pi}\frac{1}{4}$$
$$\ell_{BD} = 2m$$

Por otro lado, se sabe que la longitud total del segmento AB es de 7 metros, por lo que se puede obtener la longitud del arco AC:

$$\ell_{AC} + \ell_{CD} + \ell_{BD} = 7m$$
$$\implies \ell_{AC} = 1m$$

Con esto, se obtiene el ángulo definido por el arco AC:

$$\frac{\ell_{AC}}{2\pi R} = \frac{\delta}{360^\circ}$$
$$\implies \delta = 45^\circ$$

Finalmente, como δ y θ son complementarios, se obtiene el valor del ángulo buscado:

$$\delta + \theta = 90^\circ$$
$$\implies \theta = 45^\circ$$

Figura 4: Irène Joliot-Curie

Científica Destacada: Irène Joliot-Curie

Irène Joliot-Curie fue una fisicoquímica francesa, hija de Pierre y Marie Curie. Obtuvo el Premio Nobel de Química en conjunto con su marido, Jean Frédéric Joliot, en 1935, por su investigación en torno a la síntesis de nuevos elementos radiactivos. Ambos estudiaron las reacciones en cadena y los requisitos para la construcción acertada de un reactor nuclear que utilizara la fisión nuclear controlada para generar energía mediante el uso de uranio y agua pesada.

Irène desde muy pequeña demostró su interés y habilidades en las matemáticas Comenzó sus estudios de física y matemáticas en la Universidad de La Sorbona en octubre de 1914, pero debido al estallido de la Primera Guerra Mundial tuvo que abandonar y dedicarse a trabajar con su madre como enfermera radiológica de los heridos de guerra.

Ella realizó un trabajo muy importante sobre la radiactividad natural y artificial, la transmutación de los elementos y la física nuclear. En 1932 Irène y Frédéric fallaron en la interpretación de un experimento (en el que irradiaron parafina utilizando polonio) que Chadwick repitió y amplió y cuya correcta interpretación condujo al descubrimiento del neutrón en ese mismo año, por lo que recibió el Premio Nobel de Física en 1935.

Con sus trabajos en física nuclear y su compromiso tanto en el ámbitos social como político, Iréne plantearía el debate sobre el impacto social de la radiactividad. Además, su compromiso antifascista permaneció activo durante toda su vida, así como la lucha por la educación y el desarrollo social e intelectual de las mujeres. En plena Segunda Guerra Mundial, con el ejército nazi apunto de invadir París y ante el peligro que suponía que sus investigaciones sobre reactores nucleares cayese en manos de esos indocumentados, decide esconder sus resultados en un sobre sellado y en un lugar secreto dentro de la Academia de las Ciencias. Sitio en el que permanecieron ocultos hasta 1949.

En 1955 Irène diseñó los planos de unos nuevos laboratorios de física nuclear en la Universidad de Orsay. A comienzos de 1956 Irène fue enviada a las montañas porque se encontraba enferma, pero no mejoró. Ingresó en el Hospital Curie de París donde murió de leucemia en 1958.