Raíces

Eje temático: Números

Raíces como Definición

Raíz Cuadrada

La **raíz cuadrada** de un número a es el **número el cual se debe multiplicar por sí mismo para que resulte** a, es decir, el número que al elevar al cuadrado da como resultado a.

Como notación, la raíz cuadrada de a se denota $\sqrt{a}$, por lo tanto, se tiene que

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Hay que notar que la raíz cuadrada de a, con $a \in \mathbb{R}$, **no siempre será un número real**, pues si tomamos $a = -2$, entonces $(\sqrt{-2})^2 = -2$, pero **¡no existe ningún número real tal que al cuadrado dé negativo!** Por esta razón, cuando hablemos de raíces cuadradas y sus propiedades, nos **centraremos en raíces cuadradas de números positivos**.

Por otra parte, si pensamos en calcular $\sqrt{4}$, queremos un número que al cuadrado dé 4. Notamos que hay **dos números que cumplen esta afirmación**: 2 y -2. Por definición de raíz cuadrada, el resultado no pueden ser dos números a la vez, por lo que, por convención, **se elije el positivo**. Entonces, $\sqrt{4} = 2$.

Raíz Cúbica

La **raíz cúbica** de un número a es el **número el cual se debe multiplicar por si mismo tres veces para obtener** a, es decir, el número que al elevar al cubo da como resultado a.

Se denota $\sqrt[3]{a}$ y, por lo tanto, cumple

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

En este caso, la raíz cúbica está **definida en los reales para todo** $a \in \mathbb{R}$, por lo que usaremos números negativos y positivos. Además, siempre existirá un **único número** que al cubo dé a, por lo que no se entra en el conflicto anterior.

Raíz n-ésima

Para generalizar, definimos la **raíz n-ésima** de un número a es el **número al cual debemos elevar a la n para obtener** a. Se denota $\sqrt[n]{a}$ y cumple

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Notamos que cuando **n es par**, la raíz n-ésima toma **valores reales solo para números no negativos** y, por lo visto anteriormente, el resultado siempre será el número no negativo que cumpla la propiedad, mientras que si **n es impar**, esta toma **valores reales únicos para todo número real**.

Si se tiene $\sqrt[n]{a}$, al valor n se le llama **índice** y a a se le llama **subradical**.

Propiedades Generales

Sean $a, b \in \mathbb{R}_0^+$ y $m, n \in \mathbb{N}$. Se tienen las siguientes propiedades de raíces:

- Multiplicación de raíces de igual índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

- División de raíces de igual índice:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, b \neq 0$$

- Potencia de una raíz:

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

- Raíz de una raíz:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

- Amplificación y simplificación del orden de una raíz:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}$$

- Producto de raíces de distinto índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^m \cdot b^n}$$

- Factor de una raíz como factor subradical:

$$b \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b^n \cdot a}$$

OJO: Es muy importante que a y b sean números positivos para usar estas propiedades, puesto que si no, algunas de estas propiedades podrían no cumplirse.

Por ejemplo, si tenemos $\sqrt[3]{-8}$, sabemos que su resultado es -2, pero qué pasa si usamos la propiedad "potencia de una raíz"para amplificar por 2. Nos queda

$$-2 = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3\cdot 2]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$$

¡Lo cual es una contradicción! Por lo tanto, hay que tener mucho cuidado al tratar con estas propiedades de raíces.

Hay una propiedad importantísima que destacar, la cual es que **las raíces se pueden ver como potencias con exponente fraccionario**, donde el índice será el denominador del exponente:

Propiedad: Sean $m, n \in \mathbb{N}$, tal que $\frac{m}{n}$ es irreducible, y a un número real, entonces

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Observación 1: Se pide que $\frac{m}{n}$ sea irreducible, puesto que si no, se puede obtener la siguiente contradicción

$$2 = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{6}} = (-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$$

Observación 2: Si a es un **número no negativo**, la fracción no tiene que ser irreducible necesariamente.

Con esta propiedad, pueden verificar las propiedades generales vistas previamente, pasando cada raíz a potencia y usando las propiedades de potencias vistas en clases anteriores.

Ejercicio: Simplifique $\sqrt{48} - \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{75}$

Al igual que en las potencias, en este tipo de problemas conviene mucho dejar todos los valores con una raíz en común:

$$\begin{aligned}
\sqrt{48} - \sqrt{3} + \sqrt{12} - \sqrt{75} &= \sqrt{16\cdot 3} - \sqrt{3} + \sqrt{4\cdot 3} - \sqrt{25\cdot 3} \\
&= \sqrt{16}\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{4}\sqrt{3} - \sqrt{25}\sqrt{3} \\
&= 4\sqrt{3} - \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} \\
&= \sqrt{3}(4 - 1 + 2 - 5) \\
&= 0
\end{aligned}$$

OJO: Un error clásico con respecto a raíces es asumir que $\sqrt{a^2} = a$ para cualquier a. Esto es **falso**, puesto que si $a = -2$, entonces estaríamos diciendo que $-2 = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$. La correcta afirmación es

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Ejercicio: si $x \in \,]1,2[$, determinar el valor de $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4}$

Notamos que podemos aplicar factorizaciones dentro de las raíces:

$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}$

y aquí es donde se comete uno de los errores más clásicos de raíces. Lo típico sería cancelar los exponentes 2 con las raíces y quedar con

$= (x-1)+(x-2) = 2x-3$

Por eso, hay que ser cuidadoso al cancelar raíces, ya que como vimos en la tercera observación, esta sale con valor absoluto:

$= |x-1|+|x-2|$

y como $x \in \,]1,2[$, se tiene que, por un lado, $x-1>0 \Rightarrow |x-1| = x-1$, y por otro lado, $x-2<0 \Rightarrow |x-2| = -(x-2) = 2-x$, por lo tanto,

$= |x-1|+|x-2| = x-1+2-x = 1$

Hay que insistir en esta parte, pues como la Prueba de Transición será de alternativas, $2x-3$ de seguro hubiera estado en una de ellas para confundir.

Racionalización de Raíces

Racionalizar el denominador de una fracción consiste en **amplificar la fracción para transformarla en una equivalente cuyo denominador no contenga ninguna raíz**. Esto se puede lograr de diversas maneras:

- Caso de Racionalización simple:

  Aquí, el denominador de la fracción, tendrá como factor una raíz. En este caso tendremos que **amplificar por la raíz cuantas veces sea necesario** para eliminarla.

  En el caso raíz cuadrada, solo tendremos que amplificar por la misma raíz.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a}{b\sqrt{c}} \cdot \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{bc} \tag{1}$$

  En el caso raíz n-ésima, tendremos que amplificar $n-1$ veces por la misma raíz, es decir,

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c}} = \frac{a}{b\sqrt[n]{c}} \cdot \frac{\sqrt[n]{c^{n-1}}}{\sqrt[n]{c^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-1}}}{b\sqrt[n]{c} \cdot \sqrt[n]{c^{n-1}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-1}}}{b\sqrt[n]{c^{n}}} = \frac{a\sqrt[n]{c^{n-1}}}{bc} \tag{2}$$

- Caso de Racionalización con más de un elemento:

  En este caso, lo clásico será **completar factorizaciones** para deshacerse de las raíces en el denominador. Hay que notar que acá hay que ser un **poco más creative**, ya que hay varias factorizaciones posibles.

  El ejemplo clásico, es completar una suma por diferencia:

$$\frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}} = \frac{a}{m\sqrt{b}+n\sqrt{c}} \cdot \frac{m\sqrt{b}-n\sqrt{c}}{m\sqrt{b}-n\sqrt{c}} = \frac{a(m\sqrt{b}-n\sqrt{c})}{m^2b-n^2c} \tag{3}$$

  Ejemplo: Racionalice la siguiente expresión

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(2+\sqrt[3]{20})}$$

  Notamos que completar una suma por diferencia para el factor $(2+\sqrt[3]{20})$ no sirve mucho, ya que nos seguiría quedando una raíz, puesto que esta es raíz cúbica y no cuadrada.

  Luego, nos fijamos en el otro factor y vemos que también son raíces cúbicas, entonces hay que pensar en una factorización que tenga que ver con términos al cubo. Se deberían venir dos a la mente:

  1. $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$
  2. $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

Notamos que los signos de $(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})$ sugieren que hay que usar la 2. Comprobamos que efectivamente la 2. es la correcta cuando vemos que la expresión es $((\sqrt[3]{2})^2-\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{5}+(\sqrt[3]{5})^2)$. Así, tenemos que los valores para a y b en 2. son $a=\sqrt[3]{2}, b=\sqrt[3]{5}$

Luego, podemos amplificar la fracción y completar la factorización de suma de cubos.

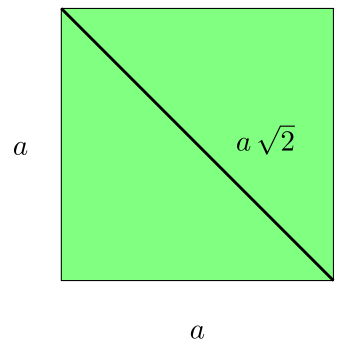
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(2+\sqrt[3]{20})} &= \frac{\sqrt[3]{4}}{(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(2+\sqrt[3]{20})}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}}\\
&= \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{25})(2+\sqrt[3]{20})}\\
&= \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})}{((\sqrt[3]{2})^3+(\sqrt[3]{5})^3)(2+\sqrt[3]{20})}\\
&= \frac{\sqrt[3]{4}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5})}{(2+5)(2+\sqrt[3]{20})}\\
&= \frac{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{5}}{7(2+\sqrt[3]{20})}\\
&= \frac{\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{20}}{7(2+\sqrt[3]{20})}\\
&= \frac{2+\sqrt[3]{20}}{7(2+\sqrt[3]{20})}\\
&= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

Así, nos damos cuenta que hay muchas maneras posibles de racionalizar una expresión. Hay veces incluso que se tendrá que amplificar más de una vez la expresión para poder racionalizarla.

Aplicación de las Raíces

Ya se verá que las raíces, en particular la raíz cuadrada, poseen un rol importante en los cálculos. Esto se nota considerablemente cuando se analizan **medidas en figuras geométricas**.

Un ejemplo clásico es el de la diagonal de un cuadrado:



Si llamamos x a la diagonal de un cuadrado de lado a y aplicamos el teorema de pitágoras

$$
\begin{aligned}
a^2 + a^2 &= x^2 \\
2a^2 &= x^2 \quad /\sqrt{\ } \\
\sqrt{2a^2} &= \sqrt{x^2} \\
\sqrt{2}\sqrt{a^2} &= \sqrt{x^2} \\
|a|\sqrt{2} &= |x| \\
a\sqrt{2} &= x \quad \text{/ya que } x \text{ y } a \text{ son positivos, pues son distancias}
\end{aligned}
$$

Podemos notar que al utilizarse la ley de pitágoras en un triángulo rectángulo, la suma de los catetos al cuadrado es equivalente a la hipotenusa al cuadrado. Luego, de factorizarse ambos catetos (por medir lo mismo), se puede proceder a aplicar la raíz cuadrada para despejar la diagonal. Hacemos notar que para cualquier cuadrado se cumple esta relación: **la diagonal de un cuadrado es equivalente a el lado multiplicado por $\sqrt{2}$**.

Figura 1: Celina Turchi

Científica Destacada: Celina Turchi

Celina Maria Turchi Martelli es una epidemióloga brasileña, investigadora de la Fundación Oswaldo Cruz de Recife. Celina asoció por primera vez el vínculo entre el virus zika y la microcefalia en recién nacidos durante el brote de la enfermedad en Brasil en 2015. Fue seleccionada por la revista Nature como una de las diez personas más notables en el campo de la ciencia en 2016 y por la revista Time como una de las cien personas más influyentes de 2017.

Turchi nació en el estado de Goiás. Se graduó en medicina en la Universidad Federal de Goiás y obtuvo su maestría en Infectología en la Escuela de Higiene y Medicina Tropical de Londres y su doctorado en la Universidad de São Paulo. Se interesó en la investigación de enfermedades transmitidas por mosquitos en 1990, cuando el dengue se propagó en Goiânia.

En 2015 Turchi fue convocada por el Ministerio de Salud de Brasil para investigar el crecimiento de casos de microcefalia en recién nacidos en el estado de Pernambuco. En el Instituto Aggeu Magalhães de Fiocruz, en Recife, dirigió el Grupo de Investigación en Epidemia de Microcefalia, un equipo de trabajo encargado de definir las causas de las malformaciones. Su grupo descubrió que el virus zika incubado en mujeres embarazadas influía en la falta de desarrollo craneal del feto.